hydra

hydraulics with QGIS

MANUEL D'ANALYSE HYDRAULIQUE

HYDRA SOFTWARE

www.hydra-software.net

contact@hydra-software.net

Version 5 – 19/06/2019

hydratec
setec

Immeuble Central Seine
42-52 quai de la Rapée
75582 Paris Cedex 12

Email : hydra@hydra.setec.fr

T : 01 82 51 64 02
F : 01 82 51 41 39

Directeur d'affaire : LPT

N°affaire :

Version	Date	Etabli par	Vérifié par	Nb pages	Observations / Visa
1	08/08/2017	LPT			
2	11/11/2017	LPT			
3	26/12/2018	LPT			
4	15/03/2019	LPT			
5	05/05/2019	LPT			

TABLE DES MATIERES

1 INTRODUCTION 2

2 DOMAINE BI DIMENSIONNEL 3

2.1 EQUATIONS DE BARRE DE ST VENANT SOUS FORME DIFFERENTIELLE 3
2.2 EQUATIONS DE BARRE DE ST VENANT SOUS FORME INTEGRALE 4
2.3 DISCRETISATION SPATIALE 4
2.4 DISCRETISATION TEMPORELLE 7
2.5 EXPRESSION DES FLUX A TRAVERS DEUX MAILLES 8
2.5.1 Reformulation 8
2.5.2 Contribution de la liaison à la matrice de rigidité et au vecteur 8
2.6 TRAITEMENT DES FORTES PENTES ET DES CHAMPS DECOUVRANTS 9
2.7 CAPTURE ET GESTION DES CHOCS 9
2.7.1 Position du problème 9
2.7.2 Analyse 1D 9
2.7.3 Application à la configuration 2D 12
2.8 FORMULATION SIMPLIFIEE 13

3 DOMAINE FILAIRE 15

3.1 LES EQUATIONS DANS UN TRONÇON DE COLLECTEUR 15
3.2 LES EQUATIONS DANS UN TRONÇON DE VALLEE 16
3.3 DECOUPAGE D'UN BRANCHE FILAIRE EN TRONÇONS 18
3.4 DISCRETISATION DES EQUATIONS 1D ANS UN TRONÇON DE COLLECTEUR OU DE VALLEE 18
3.4.1 Formulation complète 19
3.4.2 Formulation simplifiée 19

4 TRAITEMENT DE SINGULARITES 21

4.1 POSITION DU PROBLEME 21
4.2 FORMULATION 21
4.2.1 Domaine filaire 21
4.2.2 Domaine 2D 25
4.2.3 Domaine filaire – domaine 2D 28
4.2.4 Condition à la limite aval d'une branche filaire 28
4.3 LES DIFFERENTES CONFIGURATIONS 29
4.3.1 Liaison bi nodale 29
4.3.2 Liaison uni nodale 30
4.4 REGLES DE CALCUL DE LA CHARGE DANS LES EQUATIONS DES SINGULARITES 30
4.4.1 Position du problème 30
4.4.2 Les différents cas de figure 31
4.5 IMPLEMENTATION DANS LE CODE DE CALCUL 33
4.5.1 Singularité posée sur un nœud de branche filaire 33
4.5.2 Liaison bi nodale 34
4.5.3 Liaison uni nodale 34

5 PERFORMANCES DE L'ALGORITHME ET EXPLOITATION PRATIQUE 36

5.1 ROBUSTESSE ET PRECISION 36
5.2 CONDITIONS D'UTILISATION 36
5.3 TESTS DE VALIDITE 37

1 INTRODUCTION

On présente dans ce document la formulation générale retenue dans Hydra pour résoudre les équations complètes de l'hydraulique dans les domaines 2D et filaires.

Le chapitre 2 traite du domaine bi dimensionnel.

Le chapitre 3 décrit l'adaptation des équations de St Venant au domaine filaire : collecteurs et tronçons de vallée avec lits composés.

Le chapitre 4 présente le traitement des singularités.

2 DOMAINE BI DIMENSIONNEL

2.1 EQUATIONS DE BARRÉ DE ST VENANT SOUS FORME DIFFÉRENTIELLE

Les équations de Barré de Saint Venant bidimensionnelles sont basées sur le principe de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans les deux directions *(Ox)* et *(Oy)*, sous certaines hypothèses simplificatrices, notamment que les pressions dans le fluide sont hydrostatiques, ce qui revient à négliger les accélérations verticales devant l'effet de la gravité. Les vitesses longitudinales sont ainsi considérées constantes sur la hauteur de la lame d'eau.

Les équations s'écrivent ainsi :

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{q}_x + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{q}_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{q}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{{\mathrm{q}_x}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{q}_x \mathrm{q}_y}{h}\right) = (S_{0,x} - S_{f,x})$$

$$\frac{\partial \mathrm{q}_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{q}_x \mathrm{q}_y}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{{\mathrm{q}_y}^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right) = (S_{0,y} - S_{f,y})$$

Les différentes variables sont définies dans le *Tableau 1*.

Variable	Expression	Description
h		Hauteur d'eau
u		Vitesse dans la direction (Ox)
v		Vitesse dans la direction (Oy)
q_x	hu	la quantité de mouvement dans la direction *(Ox)*
q_y	hv	la quantité de mouvement dans la direction *(Ox)*
g		Constante de gravité
z_b		La cote du fond
$S_{0,x}$	$-gh\frac{\partial z_b}{\partial x}$	Le terme source lié à la pente du fond dans la direction *(Ox)*
$S_{0,y}$	$-gh\frac{\partial z_b}{\partial y}$	Le terme source lié à la pente du fond dans la direction *(Oy)*
$S_{f,x}$		Le terme source lié aux frottements dans la direction (*Ox)*
$S_{f,y}$		Le terme source lié aux frottements dans la direction (*Oy)*

Tableau 1 : Présentation des variables

$S_{f,x}$ et $S_{f,y}$ les termes sources représentant les pentes de frottements respectivement dans la direction *(Ox)* et *(Oy)*, modélisés par une extension de la loi de Manning Strickler

$$S_{f,x} = gh\,(n^2{}_{M,x} u\sqrt{u^2+v^2}h^{-4/3}) \text{ et } S_{f,y} = gh(n^2{}_{M,y} v\sqrt{u^2+v^2}h^{-4/3})$$

avec $n_{M,x}$ et $n_{M,y}$ les coefficients de Manning-Strickler dans les deux directions *(Ox)* et *(Oy)*.

Le système de Barré de Saint-Venant peut être réécrit dans sa forme différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{F} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{S}$$

Avec **U** la variable conservée définie par :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} h \\ q_x \equiv hu_x \\ q_y \equiv hu_y \end{bmatrix}$$

F le flux de la variable **U** dans la direction *(Ox)* et **G** le flux de la variable **U** dans la direction *(Oy)* définis par :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} q_x \\ \frac{{q_x}^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{bmatrix} \text{ et } \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{{q_y}^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \end{bmatrix}$$

S le terme source défini par

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ (S_{0,x} - S_{f,x}) \\ (S_{0,y} - S_{f,y}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{S}_f$$

Cette formulation sous forme différentielle convient en l'absence de discontinuité dans la solution. Pour capturer les chocs il faut partir de la formulation plus générale des lois de conservation de masse et de quantité de mouvement sous forme intégrale.

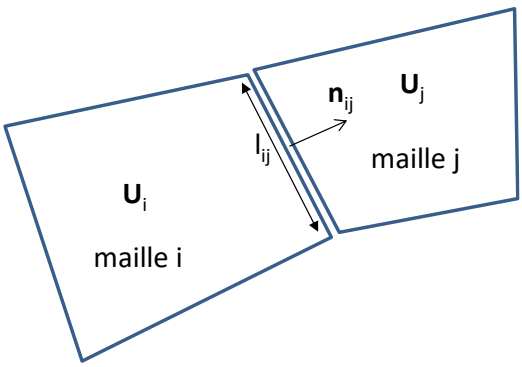
2.2 EQUATIONS DE BARRÉ DE ST VENANT SOUS FORME INTÉGRALE

Les équations intégrales appliquées à une maille de calcul Ω_i s'expriment comme suit :

$$\int_{\Omega i} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{U}\, d\Omega i + \oint_{\Gamma_i} (\boldsymbol{F}\, n_x + \boldsymbol{G} n_y) d\Gamma_i = -\int_{\Omega i} \boldsymbol{S}_f\, d\Omega i + \int_{\Omega i} \mathrm{ghgrad}(\mathrm{z_b})\, \mathrm{d}\Omega \mathrm{i} \quad (1)$$

Avec Γ_i l'ensemble des interfaces de la maille de calcul et n_x et n_y les vecteurs normaux de l'interface.

2.3 DISCRÉTISATION SPATIALE



Traitement des termes volumiques :

On affecte au vecteur **U** des valeurs moyennes $\mathbf{U}_i$ dans chaque pavé. L'équation (1) est discrétisée comme suit :

$$\int_{\Omega i} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{U}\, d\Omega i \approx A_i \frac{\partial \boldsymbol{U_i}}{\partial t}$$ où Ai = surface du pavé.

$$\int_{\Omega i} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{S}_f\, d\Omega i \approx A_i \boldsymbol{S}_{fi}$$

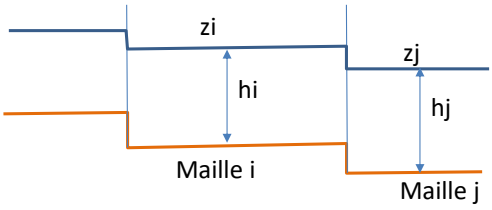
Traitement des termes de pression :

L'adaptation suivante est introduite par rapport à la formulation classique : les termes de pression aux frontières de la maille sont combinés avec la cote de fond pour faire émerger la variable z_i plutôt que h_i dans la maille

On démontre moyennant une approximation que :

$$\oint_{\Gamma_i} (\frac{g}{2} h^2) \boldsymbol{n} d\Gamma_i + \int_{\Omega_i} ghgrad(z_b) d\Omega i \approx \frac{g\widetilde{h_{ij}}}{2} \oint_{\Gamma_i} (z_j - z_i) \boldsymbol{n} d\Gamma_i \quad (2)$$

Où : $\widetilde{h_{ij}} = \frac{h_i + h_j}{2}$



L'approximation ci-dessus suppose qu'en toute rigueur les écarts entre h_i et les h_j des mailles voisines restent faibles. Son adaptation aux situations avec discontinuités est possible. Elle est examinée plus loin.

Les intégrales curvilignes sont approximées comme suit :

$$\oint_{\Gamma_i} (\boldsymbol{F} n_x + \boldsymbol{G} n_y) d\Gamma_i \approx \sum_j (\boldsymbol{F} n_x + \boldsymbol{G} n_y)\, l_{ij}$$ où F et G sont calculés le long de chaque arête de la maille i

$$\oint_{\Gamma_i} \left(\frac{z_j - z_i}{2}\right) \boldsymbol{n} d\Gamma_i \approx \sum_j \left(\frac{z_j - z_i}{2}\right) \boldsymbol{n} l_{ij}$$

L'équation (1) devient :

$$A_i \frac{\partial \boldsymbol{U_i}}{\partial t} + A_i \boldsymbol{S}_{fi} + \sum_j (\boldsymbol{F} n_x + \boldsymbol{G} n_y)\, l_{ij} = 0 \qquad (3)$$ où :

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} q_x \\ \frac{{q_x}^2}{h} + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{{q_y}^2}{h} + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) \end{bmatrix}$$

Les termes (qx et qy) doivent être évalués sur les frontières de la maille. Par contre les termes de pression sont calculés à l'aide des valeurs moyennes de Z dans chaque maille.

Cette formulation adaptée pour les termes de pression présente les avantages suivants :

- Elle permet d'intégrer la pente du fond dans les termes F et G,
- Elle facilite le couplage des domaines 2D avec les autres domaines d'un modèle Hydra,
- Elle s'intègre parfaitement dans le code existant d'Hydra.
- Elle permet de considérablement stabiliser les calculs numériques.

On voit en particulier qu'en cas de surface de cote d'eau horizontale partout, les forces de pression sur une maile s'annulent : la résultante des forces de pression sur un fond en pente est intégrée implicitement dans les termes de pression ci-dessus.

Les nouvelles variables du système sont définies comme suit dans chaque maille :

$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} z \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}$ Les valeurs de ces variables discrétisées au centre de chaque maille i sont les inconnues que l'on cherche à calculer. Elles sont définies comme suit :

$$\boldsymbol{U}_i = \begin{bmatrix} z_i \\ q_{x,i} \\ q_{y,i} \end{bmatrix}$$

Par la suite la notation « ' » est omise pour désigner les vecteurs **U**', **F**' et **G** '.

<u>Traitement des termes de flux :</u>

A l'interface (i, j) on applique :

- La formulation centrée pour les débits ;
- La formulation « upwind pour les flux de quantité de mouvement.

Les termes aux frontières sont réécrits sous la forme :

$$\mathbf{F}\ .n_x + \mathbf{G}\ .n_y = \begin{pmatrix} 0.5(q_i + q_j) \\ \boldsymbol{\alpha}_i u_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j u_j q_j \\ \boldsymbol{\alpha}_i v_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j v_j q_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_x \\ 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_y \end{pmatrix}$$

Avec :

$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$: vecteur vitesse au centroïde de la maille i

$q_i \triangleq \mathrm{q}_{x,i}.n_x + \mathrm{q}_{y,i}.n_y$

$q_j \triangleq \mathrm{q}_{x,j}.n_x + \mathrm{q}_{yj}.n_y$

$\begin{cases} \alpha_i = 1 & \text{si } q_i > 0 \\ \alpha_i = 0 & \text{si } q_i < 0 \end{cases}$

$\alpha_j = 1 \quad \text{si } q_j > 0$
$\alpha_j = 0 \quad \text{si } q_j < 0$

2.4 DISCRÉTISATION TEMPORELLE

On se place ci-après dans le cas d'absence de chocs. La prise en compte des chocs est analysée au chapitre 4.

On adopte un schéma implicite de discrétisation temporelle pour rendre l'algorithme inconditionnellement stable. Dans le schéma retenu les termes de l'équation (3) ci-dessus sont évalués à l'instant t_{n+1} :

Termes de flux :

$$\boldsymbol{F}_i^{n+1} = F_i^n + \left[\frac{\partial \Delta F}{\partial \Delta U_i}\right] \Delta \boldsymbol{U}_i + \left[\frac{\partial \Delta F}{\partial \Delta U_j}\right] \Delta \boldsymbol{U}_j$$

$$\boldsymbol{G}_i^{n+1} = \mathbf{G}_i^n + \left[\frac{\partial \Delta G}{\partial \Delta U_i}\right] \Delta \boldsymbol{U}_i + \left[\frac{\partial \Delta G}{\partial \Delta U_j}\right] \Delta \boldsymbol{U}_j$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n+1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{\boldsymbol{n}} + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{n+1}} = \mathbf{U}_{\mathbf{j}}^{\boldsymbol{n}} + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{j}}$$

Les matrices : $\left[\frac{\partial \Delta F}{\partial \Delta U_i}\right]$, $\left[\frac{\partial \Delta F}{\partial \Delta U_j}\right]$, $\left[\frac{\partial \Delta G}{\partial \Delta U_i}\right]$, $\left[\frac{\partial \Delta G}{\partial \Delta U_j}\right]$ sont de rang 3x3 et contiennent les termes différenciés par rapport au variables natives du vecteur $\mathbf{U}^n$

Terme d'inertie :

$$A_i \frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t} = \frac{A_i}{dt} \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{i}}$$

Termes de frottement :

$$\boldsymbol{S}_{fi}^{n+1} = \boldsymbol{S}_{fi}^n + \left[\frac{\partial \Delta \boldsymbol{S}_{fi}}{\partial \Delta \boldsymbol{U}_i}\right] \Delta \boldsymbol{U}_i$$

L'expression $\boldsymbol{S}_{fi}$ est écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{S}_{fi} = \begin{pmatrix} 0 \\ c q_x h_i^{\frac{-4}{3}} \\ c q_y h_i^{\frac{-4}{3}} \end{pmatrix}$$

, avec $c = \frac{g\sqrt{u^2+v^2}}{K^2}$ Ce coefficient est linéarisé à l'intant t_n.

La matrice jacobienne s'écrit en conséquence comme suit :

$$\left[\frac{\partial \Delta \boldsymbol{S}_{fi}}{\partial \Delta \boldsymbol{U}_i}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4}{3} c q_x h_i^{\frac{-7}{3}} & c h_i^{\frac{-4}{3}} & 0 \\ \frac{-4}{3} c q_y h_i^{\frac{-7}{3}} & 0 & c h_i^{\frac{-4}{3}} \end{bmatrix}$$

Au final la contribution de tous les termes aux équations de conservation de la maille i s'écrit sous la forme suivante après discrétisation :

$$[K_{ii}] \Delta \boldsymbol{U}_i + \sum_j [\boldsymbol{K}_{ij}] \Delta \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{F}_i$$

Le système matriciel global est formé en répétant le calcul pour toutes les mailles. On doit ainsi résoudre un système matriciel à 3N inconnues où N est le nombre de mailles.

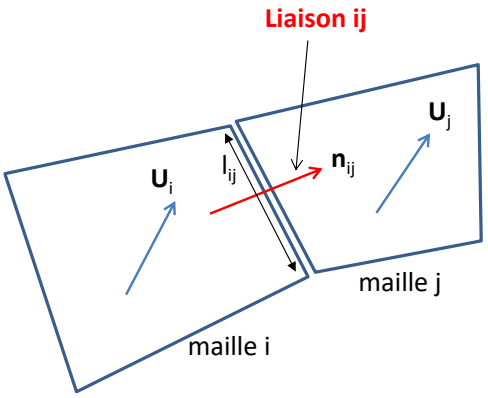
En pratique le système matriciel est formé en calculant les contributions de chaque liaison aux termes de flux des mailles qui sont connectées à la liaison, puis les contributions des termes volumiques dans chaque maille : inertie et frottement.

2.5 EXPRESSION DES FLUX À TRAVERS DEUX MAILLES

2.5.1 Reformulation

Une liaison LPAV doit obligatoirement connecter deux mailles (pavé 2D)

La formulation précédente doit être explicitée au niveau de chaque liaison pour les traitements numériques. Le principe consiste à expliciter les contributions des termes de flux d'une liaison bi nodale sur chacune des mailles en distinguant deux cas :



$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{FLUX}_{ij} \\ \boldsymbol{FLUX}_{ji} \end{pmatrix} = l_{ij} \begin{pmatrix} 0.5(q_i + q_j) \\ (\boldsymbol{\alpha}_i u_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j u_j q_j) + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_x \\ (\boldsymbol{\alpha}_i v_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j v_j q_j) + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_y \\ -0.5(q_i + q_j) \\ -(\boldsymbol{\alpha}_i u_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j u_j q_j) + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_x \\ -(\boldsymbol{\alpha}_i v_i q_i + \boldsymbol{\alpha}_j v_j q_j) + 0.5 g \widetilde{h_{ij}} (z_j - z_i) n_y \end{pmatrix}$$

2.5.2 Contribution de la liaison à la matrice de rigidité et au vecteur

Les termes de flux sont récrits ci-dessous par rapport au vecteur inconnu, de façon à être différenciés par rapport aux variables de ce vecteur :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} z \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

<u>On a des termes de la forme :</u>

$$\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{FLUX}_{ij}^{n+1}\right)_s \\ \left(\boldsymbol{FLUX}_{ji}^{n+1}\right)_s \end{bmatrix} = l_{ij} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{33} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{U}_i \\ \Delta \boldsymbol{U}_j \end{bmatrix} + l_{ij} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

Les coefficients $a_{ij}\ et\ \ f_i$ sont explicités dans les fiches de l'annexe jointe.

2.6 TRAITEMENT DES FORTES PENTES ET DES CHAMPS DECOUVRANTS

La méthode complète de résolution décrite ci-dessus présente certaines difficultés dans les calculs en régime transitoire sur un fond bathymétrique irrégulier, lorsque les mailles sont mises à découvert ou qu'elles sont recouvertes par une faible épaisseur de lame d'eau. C'est notamment le cas dans les modélisations 2D dans un cours d'eau naturel ou dans les zones estuariennes influencées par la marée.

En pratique, l'absence de traitement spécifique se traduit par des oscillations locales des niveaux d'eau et par une réduction conséquente des pas de temps de calculs.

Une méthode spécifique a été mise au point dans HYDRA pour contourner cette difficulté :

- une formulation locale simplifiée entre deux mailles adjacentes est appliquée lorsque la pente locale du fond dépasse 10%,
- dans les autres cas les termes convectifs qui sont sources d'oscillation sont progressivement réduits lorsque la hauteur d'eau sur une maille devient inférieure à 10 cm.

Avec ces traitements correctifs les pas de temps ne sont plus bridés en cas de mailles découvrantes et les temps de calcul ne sont pratiquement plus affectés.

2.7 CAPTURE ET GESTION DES CHOCS

2.7.1 Position du problème

La formulation ci-dessus repose sur un algorithme de résolution implicite qui suppose l'absence de discontinuité. Or le système de Barré de St Venant est de nature hyperbolique et par conséquent, peut voir se développer des chocs (c'est-à-dire des discontinuités brutales) se propageant dans le domaine 2D

Le principe retenu pour capturer le choc consiste à adapter le terme de flux de pression apparaissant dans l'équation (2), de façon à satisfaire approximativement le bilan de quantité de mouvement à l'intérieur d'une maille, que celle-ci soit traversée par un choc ou non.

Les fondamentaux des mécanismes de chocs peuvent être analysés dans un premier temps par une approche 1D, l'application au domaine 2D s'appuie sur le fait que localement le front de propagation du choc est régi par des équations 1D localement.

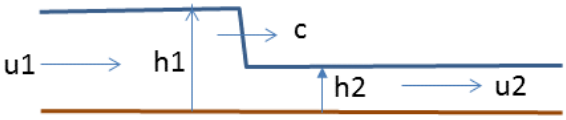
2.7.2 Analyse 1D

a) Equations du choc

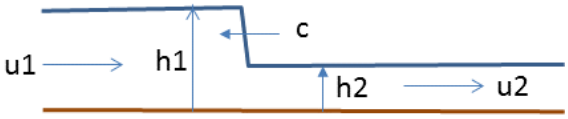
On considère un écoulement dans un canal rectangulaire avec une variation de variables d'état (h1, u1) et (h2, u2) entre deux positions fixes (1) et (2) rapprochées du canal.

Entre ces 2 positions prend place un front d'onde animé d'une vitesse positive ou négative selon les valeurs de couples (h1, u1) et (h2, u2) :

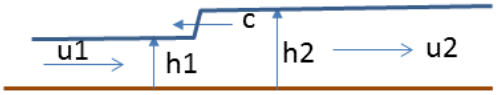
On recense 4 cas de figures distincts selon le rapport h1/h2 et le sens de propagation de la perturbation :



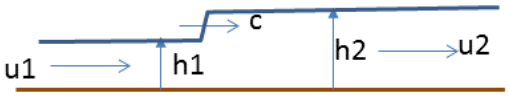
Onde positive d'amont



Onde négative d'aval



Onde positive d'aval



Onde négative d'amont

Le front d'onde peut être raide : on parle alors d'intumescence ou de choc mobile. Le passage de l'état (1) à l'état (2) est brutal et s'accompagne d'une dissipation importante d'énergie.

Il peut également être très progressif : on parle alors d'une onde d'expansion. Les équations décrivant le passage de l'état (1) vers l'état (2) peuvent être écrites sous forme différentielle car il n'y a pas dans ce cas de discontinuité brutale.

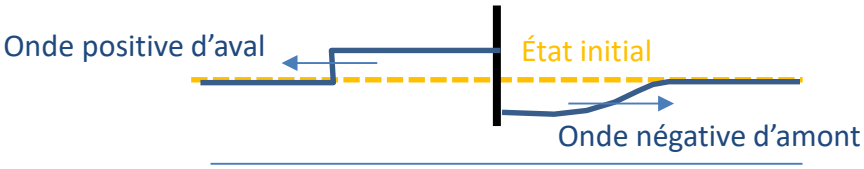
En l'absence de termes sources (frottement nul et pente nulle), on se ramène à un problème de Riemann :

- Une onde positive va se raidir progressivement et se transformer en choc.
- Une onde négative va progressivement s'épaissir : elle ne peut pas créer de choc et elle est donc assimilable à une onde d'expansion.

Ces ondes sont créées par des manœuvres brusques d'organes. Les deux exemples les plus classiques sont :

- la rupture de barrage qui génère à l'amont une onde « négative d'aval » et à l'aval une onde « positive d'amont » :

- l'abaissement brutal d'une vanne dans un canal qui génère à l'amont une onde « positive d'aval » et à l'aval une onde « négative d'amont » :



La prise en compte des termes source altèrent notablement les configurations ci-dessus. On démontre notamment que les termes de pente et de frottement peuvent stabiliser une onde positive d'amont et éviter l'apparition d'une onde de choc. De la même façon une onde négative d'amont peut se transformer en ressaut hydraulique si la vanne s'abaisse suffisamment.

En l'absence de choc les équations des chapitres précédents s'appliquent. En cas de choc on applique les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le repère mobile lié au choc :

$$h_1(u_1 - c_s) = h_2(u_2 - c_s) \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}gh_1^2 + h_1(u_1 - c_s)^2 = \frac{1}{2}gh_2^2 + h_2(u_2 - c_s)^2 \qquad (7)$$

Après manipulation on trouve l'expression suivante pour cs:

<u>Cas d'une onde dirigée vers l'aval : c_s>0</u>

$$\frac{c_s}{\sqrt{gh_1}} = F_1 + \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \qquad \text{avec :} \quad F_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}} \ (8)$$

Pour qu'il y ait choc il faut que la condition : $c_s > u_2 + \sqrt{gh_2}$ soit satisfaite : l'onde c_s rattrape la célérité de l'onde caractéristique la plus rapide se propageant vers l'aval dans la zone non perturbée.

<u>Cas d'une onde dirigée vers l'amont : c_s<0</u>

$$\frac{c_s}{\sqrt{gh_1}} = F_1 - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \qquad \text{Avec :} \quad F_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gh_1}} \ (9)$$

Pour qu'il y ait choc il faut que la condition : $|c_s| > \sqrt{gh_1} - u_1$ soit satisfaite : l'onde c_s rattrape la célérité de l'onde caractéristique la plus rapide de propageant vers l'amont dans la zone non perturbée.

b) Adaptation de l'algorithme.

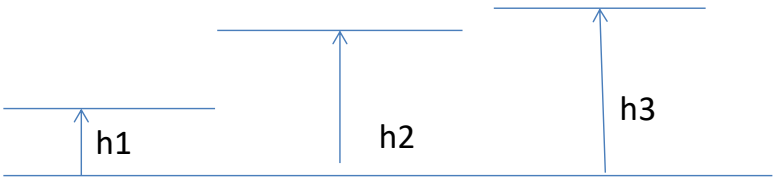
Soit les 3 mailles contiguës M1, M2 et M3 :

Notre équation discrétisée de quantité de mouvement le long de l'axe x dans la maille M2 s'écrit comme suit en régime permanent :

$$-Qu_1 + Qu_2 + \frac{g}{2}(z_2 - z_1)h_{12} + \frac{g}{2}(z_3 - z_2)h_{23} + c_2Q = 0 \quad (10)$$

Supposons maintenant l'existence d'un ressaut entre les mailles 1 et 2 :

On a : $z_2 \approx z_3 \ et \ c_2Q \approx 0$



L'équation (10) devient :

$$-Qu_1 + Qu_2 + \frac{g}{2}\,(h_2 - h_1)h_{12} = 0 \qquad (11)$$

$$Qu_2 + \frac{g}{2}\,h_1 h_{12} = Qu_1 + \frac{g}{2}\,h_2 h_{12}$$

C'est une équation de ressaut linéarisée par rapport au terme h_{12} .

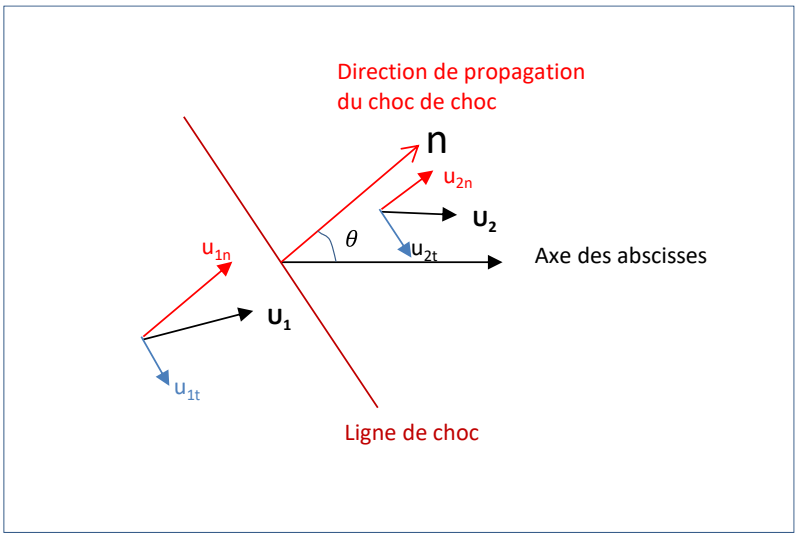
En conclusion : notre formulation permet de capturer les chocs, mais elle introduit certaines distorsions pour les chocs puissants. Il faut analyser par la poursuite des tests les niveaux de validité de notre solution en régime permanent sur une plage relativement étendue de configurations.

Remarque importante : on peut montrer de la même manière que notre formulation générale permet de décrire les intumescences (régime transitoire) avec le même niveau de précision que pour le régime permanent. Les équations discrétisées en régime transitoire correspondent aux équations de choc avec cependant une linéarisation du terme de pression.

2.7.3 Application à la configuration 2D

c) Equations du choc

Les équations locales de choc sont similaires à celles du cas 1D. Elles peuvent être simplement dérivées à l'aide du schéma de définition suivant :



Les lois de conservation à la traversée du choc s'appliquent en considérant les composantes de vitesse perpendiculaires à la ligne de choc :

$$h_1(u_{1n} - c) = h_2(u_2 n - c) \qquad (12)$$

$$\frac{1}{2}gh_1^2 + h_1(u_{1n} - c)^2 = \frac{1}{2}gh_2^2 + h_2(u_2 n - c)^2 \qquad (13)$$

On en déduit l'expression suivante pour la vitesse de propagation du choc « c » :

$$c = F_{1n} - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \qquad \text{avec :} \qquad F_{1n} = \frac{u_{1n}}{\sqrt{gh_1}} \qquad (14)$$

La direction de propagation du choc est définie par l'angle θ formée avec l'axe des abscisses. Cette direction peut être déterminée en exploitant la propriété de continuité de la vitesse tangentielle à la traversée de la ligne de choc :

$u_{1t} = u_{2t}$ (15)

On trouve après manipulation que l'angle θ est donné par l'expression :

$$tg\theta = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \qquad (16)$$

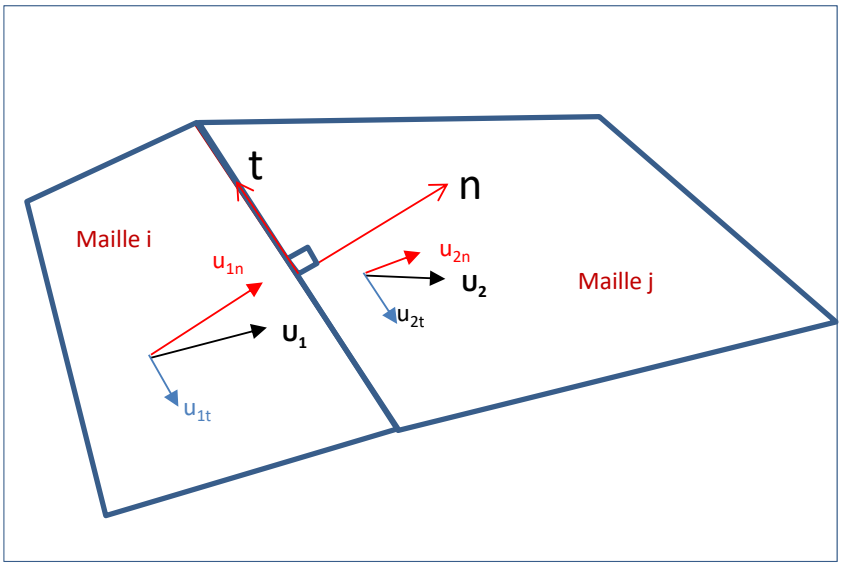
d) Adaptation de l'algorithme

Le problème devient plus compliqué que dans la dimension 1D, dans la mesure où la direction du choc n'est pas en général alignée avec les contours des mailles : en toute rigueur le suivi du choc dans une maille nécessite de suivre précisément l'intersection de la ligne de choc avec les arêtes de la maille, de façon à traduire correctement les flux échangés avec les mailles voisines. Cette procédure s'avère cependant très lourde et peu compatible avec un maillage fixe.

Afin de conserver aux algorithmes toute leur fluidité on introduit une simplification importante en supposant qu'un front local de discontinuité, s'il se manifeste, reste tangent à l'arête de la maille coupée. Cette supposition est bien sûr erronée localement mais les expérimentations faites avec des algorithmes explicites montrent que les distorsions induites se neutralisent à l'échelle de quelques mailles.

L'adoption d'une telle hypothèse simplifie considérablement les algorithmes et permet d'adapter simplement comme suit l'algorithme décliné ci-dessus pour le cas 1D :

On travaille par liaison inter maille. On a pour chaque liaison la configuration suivante :



Soit n la normale à l'arête connectant les mailles i et j. La projection sur la direction n de l'équation de quantité de mouvement discrétisée nous ramène aux équations (12) et (13), soit les équations de conservation à travers le choc : avec la formulation adoptée le problème du choc en 2D se ramène à un problème de choc localement unidirectionnel.

2.8 FORMULATION SIMPLIFIEE

Dans la formulation simplifiée les termes convectifs sont négligés il reste :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q_x + \frac{\partial}{\partial y} q_y = 0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} g h^2\right) = (S_{0,x} - S_{f,x})$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} g h^2\right) = \left(S_{0,y} - S_{f,y}\right)$$

Moyennant quelques manipulations on montre que le système d'équations ci-dessus peut être ramenée à une seule équation avec la cote d'eau comme inconnue.

Les débits entre mailles sont calculés en fin de chaque pas de temps à l'aide de la solution calculée en z ans chaque maille.

On se ramène ainsi à un système d'équations à un seul degré de liberté, ce qui réduit évidemment les temps de calcul. Ce faisant on limite bien sûr le champ d'application de la modélisation aux problèmes pour lesquels cette simplification est justifiée. En particulier cette formulation simplifiée exclue toutes les classes de problèmes impliquant les chocs hydrauliques discutés au §2.6 ci-dessus.

3 DOMAINE FILAIRE

3.1 LES ÉQUATIONS DANS UN TRONÇON DE COLLECTEUR

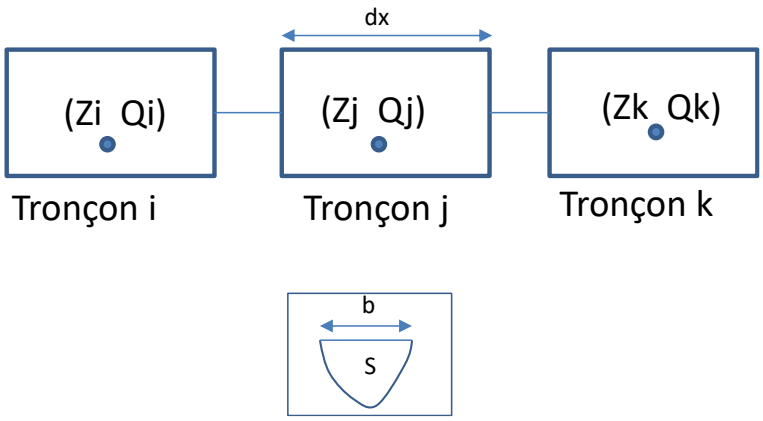
Les équations 2D développées au chapitre 1 peuvent être intégrées le long d'une section transversale pour déboucher sur des équations 1D, s'appliquant au domaine filaire.

Les équations écrites sous forme différentielle deviennent :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q = Q_{lat}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{S}\right) + gS\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2}\right) = 0$$ où D est la débitance = $KSR^{\frac{2}{3}}$

L'intégration de ces équations sur une maille j abouti à la formulation recherchée sous forme intégrale :

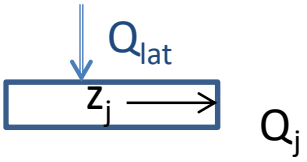


Les équations écrites sous forme intégrale s'écrivent :

$$bdx\frac{\partial z_j}{dt} = Q_i - Q_j + Qlat \qquad (17)$$

$$dx\left(\frac{\partial Q_j}{dt} + gS\frac{Q_j|Q_j|}{D_j^2}\right) = \left[\frac{Q_i^2}{S_i} + gS_{ij}\left(\frac{z_i - z_j}{2}\right)\right] - \left[\frac{Q_j^2}{S_i} + gS_{jk}\left(\frac{z_k - z_j}{2}\right)\right] \qquad (18)$$

Le débit Q_j est défini comme le débit au nœud aval du tronçon j :



Le traitement des termes de flux est le même que dans la formulation 2D. :

- Centré pour le débit
- Upwind pour le flux de quantité de mouvement

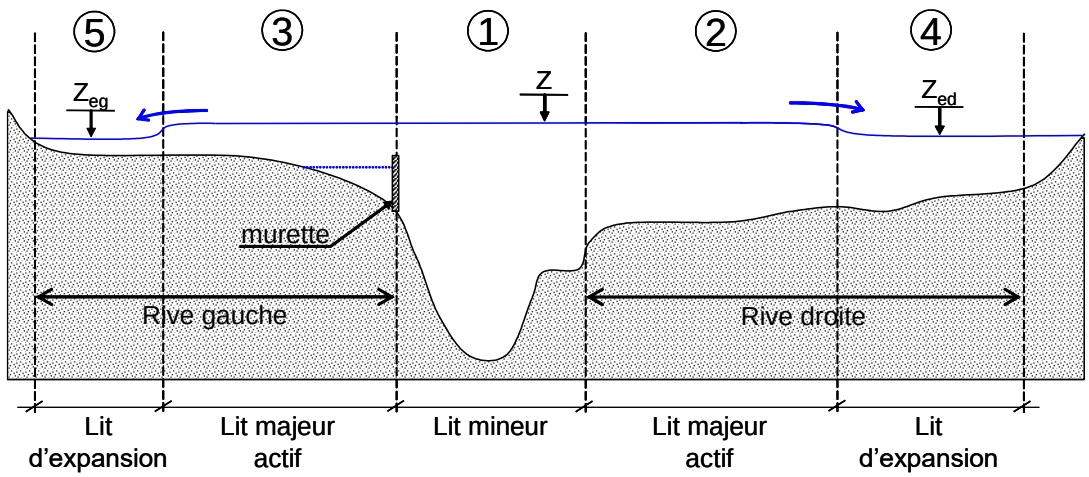
Le traitement des termes de pression est également identique.

Les variables primaires pour le domaine filaire sont :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} z \\ Q \end{bmatrix}$$

Le terme Q_{lat} désigne la contribution des lisons transversales ou des singularités uni nodales connectée au nœud j. Il est ignoré pour l'instant.

3.2 LES ÉQUATIONS DANS UN TRONÇON DE VALLÉE



Equations généralisées de Barré de Saint Venant : formulation de base

Continuité (lit mineur + majeur actif) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_m + \frac{S_M}{s}\right) + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(q_{eg} + q_{ed})}{s} + q_a$$

Quantité de mouvement (lit mineur + majeur actif) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta \frac{Q^2}{S_m + S_M}\right) + g\left(S_m + S_M\right)\left[\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2} - \alpha_v U^2\right] = 0$$

Continuité (lits d'expansion) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(S_{eg}) = -\frac{q_{eg}}{s} \\ \frac{\partial}{\partial t}(S_{ed}) = -\frac{q_{ed}}{s} \end{cases}$$

t : temps

x : abscisse curviligne le long du lit mineur

s : coefficient de sinuosité

Q : débit total le long du lit mineur +lit majeur actif

q_a : débit d'apport latéral réparti par mètre linéaire

q_{eg}, q_{ed} : débits d'échange latéral entre lits majeurs et lits d'expansions :

$$\begin{cases} q_e = -\mu_1 \sqrt{2g}\ (Z - Z_e)^{3/2} & \text{si } Z > Z_e \\ q_e = +\mu_2 \sqrt{2g}\ (Z_e - Z)^{3/2} & \text{si } Z < Z_e \end{cases}$$

avec μ_1, μ_2 : coefficients d'échanges en phase de crue et en phase de décrue respectivement

Z : cote d'eau le long du lit mineur

S_m : surface de la section mouillée du lit mineur

S_M : surface de la section mouillée du lit majeur actif (rive droite + rive gauche)

S_{eg}, S_{ed} : surfaces des sections mouillées du lit d'expansion en rive gauche et en rive droite

D : débitance $= A\, S_m\, K_m\, R_m^{2/3} + \sqrt{s.\left[1 + \frac{S_m}{S_M}\left(1 - A^2\right)\right]}.S_M K_M R_M^{2/3}$

avec
- K_m et K_M : coefficients de Strickler des lits mineur et majeurs actifs
- R_m et R_M : rayons hydrauliques du lit mineur et majeurs actifs
- A : coefficient de Debord = $0{,}9\left(\frac{K_m}{K_M}\right)^{0{,}1666}$

β : coefficient d'échange de quantité de mouvement entre lits mineur et majeur :

$$\beta = \left(\frac{1}{S_M} + \frac{\eta^2}{S_m}\right)\left(\frac{S_m + S_M}{(1+\eta)^2}\right)$$ avec

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{A S_m K_m R_m^{2/3}}{S_M K_M R_M^{2/3}.\sqrt{s.\left[1 + \frac{S_m}{S_M}\left(1 - A^2\right)\right]}}$$

α_v terme d'entraînement du au vent, de la forme : $\frac{\rho_{air}}{\rho_{eau}} C_a \frac{B}{gS}$

C_a : coefficient d'entraînement, intégrant la direction du vent par rapport à l'axe du tronçon.

<u>Les équations sous forme intégrale s'écrivent :</u>

$$B dx \frac{\partial z_j}{dt} = Q_i - Q_j + \left(\frac{q_{eg} + q_{ed}}{s}\right) + q_a \qquad (17b)$$

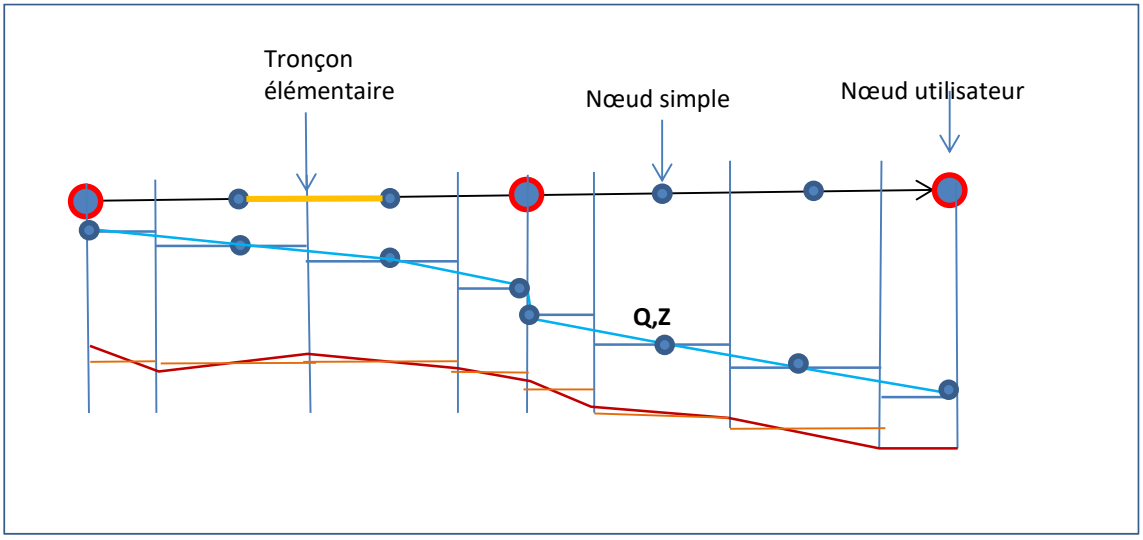
$$dx\left(\frac{\partial Q_j}{dt} + gS\frac{Q_j|Q_j|}{D_j^2}\right) = \left[\beta\frac{Q_i^2}{S_i} + gS_{ij}\left(\frac{z_i - z_j}{2}\right)\right] - \left[\beta\frac{Q_j^2}{S_i} + gS_{jk}\left(\frac{z_k - z_j}{2}\right)\right] + gSU^2 \qquad (18b)$$

Avec: $S = S_M + S_m$

$B = B_M + B_m$

3.3 DÉCOUPAGE D'UN BRANCHE FILAIRE EN TRONÇONS

Une branche filaire se compose dans Hydra d'une succession de tronçons homogènes de collecteurs entrecoupés de regards pouvant recevoir des singularités :



Les mailles sont centrées sur les nœuds simples et sont d'autre part découpés par les nœuds utilisateurs : Deux nœuds de calculs sont générés de part et d'autres d'un nœud utilisateur.

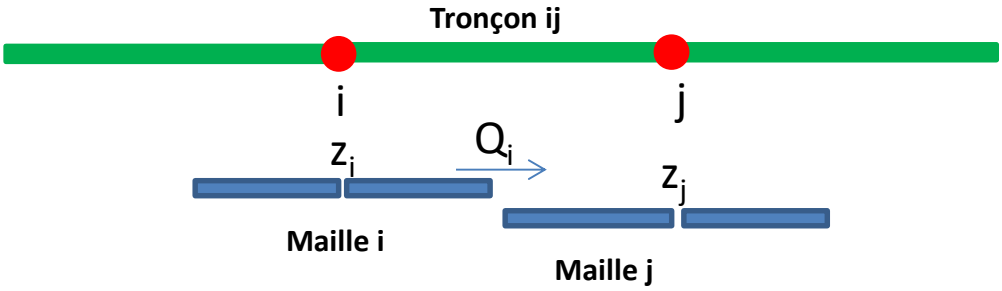
Deux nœuds simples contigus sont connectés via une liaison interne à travers laquelle les flux sont calculés selon les équations (17) et (18) ci-dessus.

Deux nœuds de calculs bordant un nœud utilisateurs sont généralement connectés via une liaison associée à une singularité créant une perte de charge le long de la branche. Le traitement de cette singularité s'appuie sur la même analyse que pour le domaine 2D.

En définitive le tronçon de collecteur est assimilé à une maille 2D particulière pour laquelle la direction de l'écoulement est parallèle à l'axe du tronçon : les 3 variables primaires d'une maile 2D se réduisent à deux variables primaires : (Z, Q) dans laquelle Q représente le débit longitudinal au nœud aval du tronçon. Les principes de discrétisation décrites pour le domaine 2D s'adaptent sans difficultés au cas du domaine filaire.

3.4 DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS 1D ANS UN TRONÇON DE COLLECTEUR OU DE VALLÉE

La façon la plus simple d'implémenter l'algorithme de discrétisation pour le codage est de considérer un tronçon de collecteur entre deux nœuds courants et de calcul la contribution de ce tronçon aux deux mailles 1D portées par les nœuds extrémités comme suit :



3.4.1 Formulation complète

Contribution du tronçon ij aux termes volumiques des mailles i et j :

$$\begin{pmatrix} \frac{bdx}{2dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dx}{2dt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{bdx}{2dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dx}{2dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_i \\ dQ_i \\ dz_j \\ dQ_j \end{pmatrix}$$

Contribution du tronçon ij aux termes de frottement des mailles i et j :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_i \\ dQ_i \\ dz_j \\ dQ_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dx}{2} g \frac{S_i}{D_1^2} Q_i|Q_i| \\ 0 \\ \frac{dx}{2} g \frac{S_j}{D_j^2} Q_j|Q_j| \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = -2\frac{dx}{2} g \frac{S_i}{D_i^2} Q_i|Q_i|\mu_i$$

$$a_{43} = -2\frac{dx}{2} g \frac{S_j}{D_j^2} Q_i|Q_i|\mu_i$$

$$a_{22} = dxg\frac{S_i}{D_i^2}|Q_i|$$

$$\mu \ est\ défini\ apr : dD = D\mu dz$$

$$a_{44} = dxg\frac{S_j}{D_j^2}|Q_j|$$

Contribution du tronçon ij aux termes de pression :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -gS_{ij}/2. & 0. & 0gS_{ij}/2. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -gS_{ij}/2. & 0 & gS_{ij}/2. & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_i \\ dQ_i \\ dz_j \\ dQ_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ gS_{ij}\frac{(z_j - z_i)}{2} \\ 0 \\ gS_{ij}\frac{(z_j - z_i)}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{ij}\ est\ défini\ par : S_{ij} = \frac{S_i + S_j}{2}$$

Contribution du tronçon ij aux flux de quantité de mouvement :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_i^2 & 2u_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_i^2 & -2u_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_i \\ dQ_i \\ dz_j \\ dQ_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Q_i^2}{S_i} \\ 0 \\ -\frac{Q_j^2}{S_j} \end{pmatrix}$$

3.4.2 Formulation simplifiée

On néglige les termes d'inertie et les termes convectifs. Les équations (17) et (18) deviennent :

$$bdx\frac{\partial z_j}{dt} = Q_i - Q_j + Qlat \qquad (19)$$

$$dx\left(gS\frac{Q_j|Q_j|}{D_j^2}\right) = \left[gS_{ij}\left(\frac{z_i - z_j}{2}\right)\right] - \left[gS_{jk}\left(\frac{z_k - z_j}{2}\right)\right] \qquad (20)$$

Moyennant quelques approximations on montre que :

$\frac{Q_i|Q_i|}{D_{ij}^2} = \frac{z_i - z_j}{dx_{ij}}$ et $\frac{Q_j|Q_j|}{D_{jk}^2} = \frac{z_j - z_k}{dx_{jk}}$ soit $Q_i = Q_i(z_i, z_j)\ et\ Q_j = Q_i(z_j, z_k)$ (21)

Le nombre de variables indépendantes tombe à 1 : la cote z attachée à chaque nœud de calcul. Le débit Q sort du système matriciel à résoudre est calculé en fin de pas de temps après résolution du système matriciel en z.

<u>La contribution du tronçon ij au système matriciel s'écrit comme suit :</u>

$$\begin{pmatrix} \frac{bdx}{2dt} + \frac{\partial Q_i}{\partial z_i} & \frac{\partial Q_i}{\partial z_j} \\ \frac{-\partial Q_i}{\partial z_i} & \frac{bdx}{2dt} - \frac{\partial Q_i}{\partial z_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_i \\ dz_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_i \\ -Q_i \end{pmatrix}$$

4 TRAITEMENT DE SINGULARITES

4.1 POSITION DU PROBLÈME

La formulation générale présentée dans les chapitres précédents s'applique à un domaine 2D ou filaire homogène, où toutes les singularités sont décrites géométriquement par des mailles ou des tronçons épousant la forme de ces singularités. Cette description géométrique des singularités présente une double difficulté :

- elle nécessite une discrétisation poussée du maillage au voisinage et à travers chaque singularité, augmentant ainsi le nombre de maille et donc la taillé du modèle
- elle ne permet pas de reproduire les phénomènes locaux de turbulence (et donc de perte de charge) induits par la singularité et fausse ainsi les calculs.

Une alternative consiste à introduire des liaisons de nature spécifique entre deux mailles avec des formules de pertes de charge décrivant précisément le comportement physique de la liaison.

En mode de calcul complet (mode Affin) le traitement des équations de flux (débit et quantité de mouvement) à travers une liaison bi nodale ou uni nodale fait appel à des algorithmes particuliers et nécessite de considérer un nombre étendu de configurations.

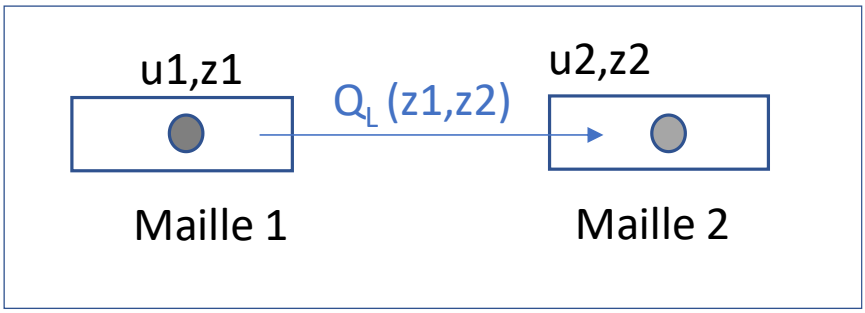
Le présent chapitre :

- décrit la formulation retenue,
- liste tous les cas traités et commente la façon dont ils sont codés dans le programme de calcul Whydram.exe.

4.2 FORMULATION

4.2.1 Domaine filaire

On considère ci-après une singularité connectant deux mailles adjacentes le long d'une branche filaire :



Dans la formulation complète les inconnues sont :

- la vitesse et la cote (u1, z1) au centroïde de la maille amont,
- la vitesse et la cote (u2, z2) au centroïde de la maille aval.

On définit le terme de débit et d'énergie au centroïde de chaque maille :

- q1 = u1 x s1, e1 = z1 + u1**^{2}/2g
- q2 = u2 x s2, e2 = z2 + u2**^{2}/2g

où s1 et s2 sont les sections mouillées au centroïde de chaque maille.

On définit également le nombre de Froude dans chaque maille :

- Fr1 = u1 / sqrt (g x s1/b1) b1 désigne la largeur au miroir dans la section 1
- Fr2 = u2 / sqrt (g x s2/b2) b2 désigne la largeur au miroir dans la section 2.

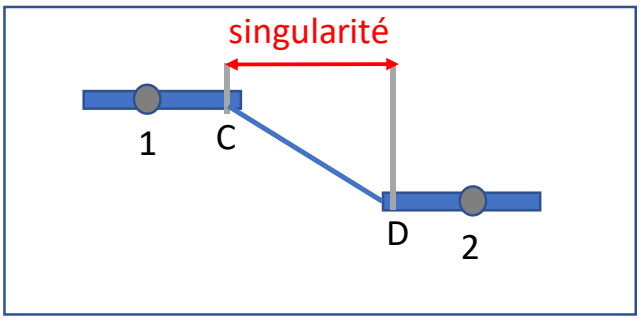
En l'absence de singularité les flux d'échange entre deux mailles adjacentes sont calculés comme suit :

- débit : Q = 0.5* (q1+q2)
- quantité de mouvement : F = q1 x u1 si q1 >0. ou F= q2 x u2 si q1 < 0.

Lorsqu'une singularité est définie entre les deux mailles le problème se complique car on introduit une relation supplémentaire, à savoir le débit d'échange Q_L qui est fonction de la loi de perte de charge associée à la singularité. Dans la formulation simplifiée cette difficulté ne se pose pas car les seules inconnues considérées sont les cotes (z1, z2) au centroïde de chaque maille ; la vitesse dans chaque maille est obtenue en fin de chaque pas de temps à partir du calcul des cotes d'eau (z1, z2).

Pour compliquer un peu plus la formulation on considère dans HYDRA qu'une singularité peut être posée sur un nœud utilisateur avec des géométries différentes sur la maille amont et sur la maille aval.

Pour tenir compte de l'ensemble des cas possibles d'écoulement dans la formulation complète on partitionne localement le système formé par deux mailles adjacentes comme suit :



Deux nœuds de calcul intermédiaires : C et D sont introduits aux frontières des mailles 1 et 2, de part et d'autre de la singularité. On suppose dans ce qui suit que le débit d'écoulement est positif dans le sens 1-2.

Les étapes de traitement au cours d'un pas de temps [t_n t_{n+1}] sont les suivantes :

<u>Calcul du débit QL = f (e1, e2)</u>

La fonction est f s'exprime différemment selon que le régime d'écoulement est dénoyé ou non :

- en régime dénoyé : f = f_d (e1)
- en régime noyé : f = f_n (e1, e2)

<u>Calcul de la cote zc au point C</u>

zc est calculé en supposant le régime dénoyé en résolvant l'équation : q1 = f_d (ec).

<u>Calcul de la cote et de la vitesse au point D :</u>

On suppose pour cela que l'écoulement est dénoyé et que l'énergie est conservée entre les sections C et D : ed = ec pour le débit q1.

On déduit de cette équation les cote et vitesse au point D : zd et ud.

<u>Comparaison des termes d'impulsion au droit des sections D et 2 :</u>

Md = q1 x ud + fp(zd)

M2 = q1 x u2 + fp(z2)

fp désigne la force de pression statique.

On définit le terme iflag2 comme suit :

- si Md < Me ou Fr2 >1 : iflag2 = 1
- si Md < Me : iflag2 = 0

Comparaison des termes d'impulsion au droit des sections 1 et C :

M1= q1 x u1 + fp(z1)

Mc = q1 x uc + fp(zc)

On définit le terme iflag1 comme suit :

- si M1 > Mc ou Fr1 >1 : iflag1 = 1
- si M1 < Mc : iflag1 = 0

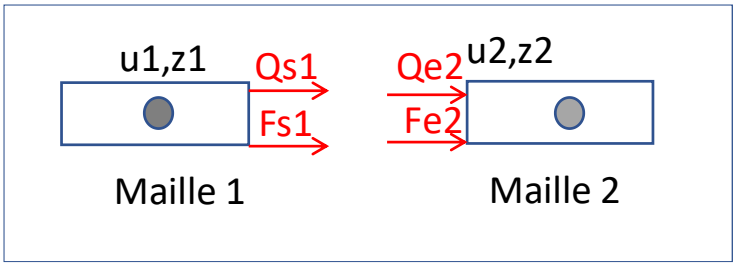
Calcul des flux échangés entre les mailles 1 et 2.

Les termes de débit et de quantité de mouvement échangés dépendent des valeurs prises par les indicateurs iflag1et iflag2. Les expressions appliquées dans le code sont données dans le tableau ci-dessous :

Iflag1	Iflag2	Qs1	Qe2	Fs1	Fe2
0	0	f (e1, e2)	f (e1, e2)	q1 x u1	q1 x u1
0	1	f (e1, e2)	f (e1, e2)	q1 x u1	q1 x ud
1	0	0.5 x (q1 +q2)	0.5 x (q1 +q2)	q1 x u1	q1 x u1
1	1	0.5 x (q1 +q2)	0.5 x (q1 +q2)	q1 x u1	q1 x ud

Dans le tableau ci-dessus :

- Qs1 désigne le débit sortant de la maille 1,
- Qe2 désigne le débit entrant dans la maille 2,
- Fs1 désigne le flux de quantité de mouvement sortant de la maille 1,
- Fe2 désigne le flux de quantité de mouvement entrant dans la maille 2.



On peut constater dans le tableau ci-dessus que les débits échangés entre les mailles 1 et 2 sont égaux dans tous les cas, par contre les flux de quantité de mouvement peuvent différer si ireg2=1.

Les schémas de la page suivante illustrent les allures des lignes d'eau en combinant les différentes configurations. Sur ces schémas :

- F désigne une branche à faible pente (branche fluviale)
- T désigne une branche à forte pente (branche torrentielle).

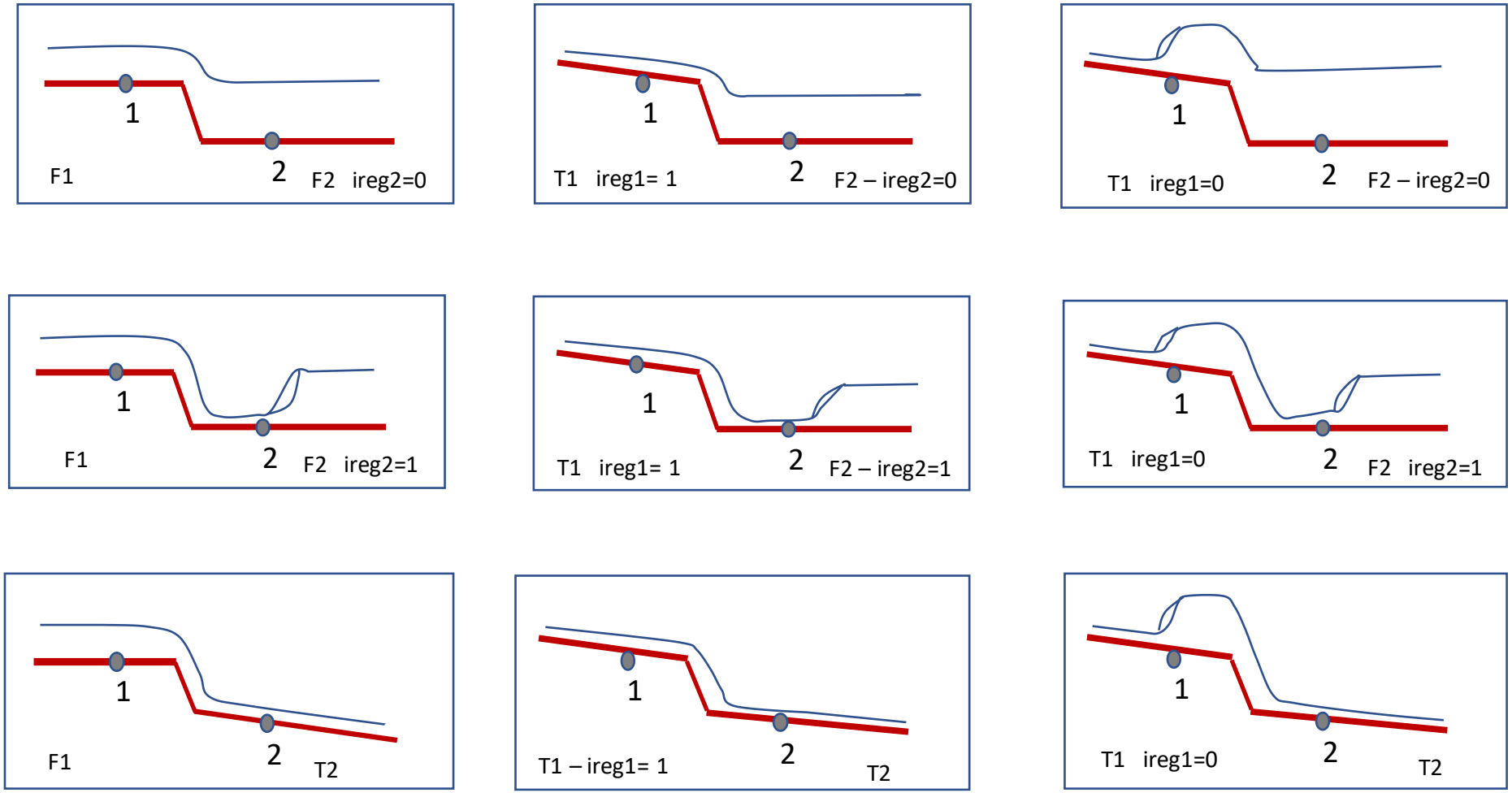
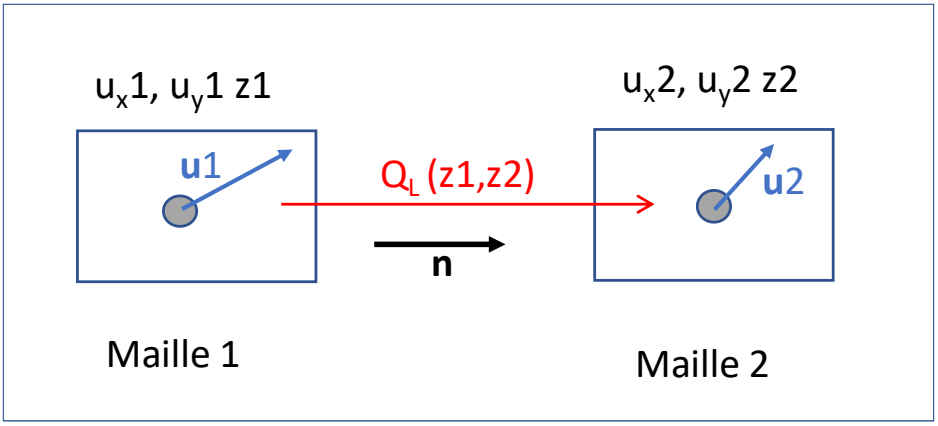


Figure 4-1 : les différentes configurations d'écoulement en mode de calcul Affin.

4.2.2 Domaine 2D

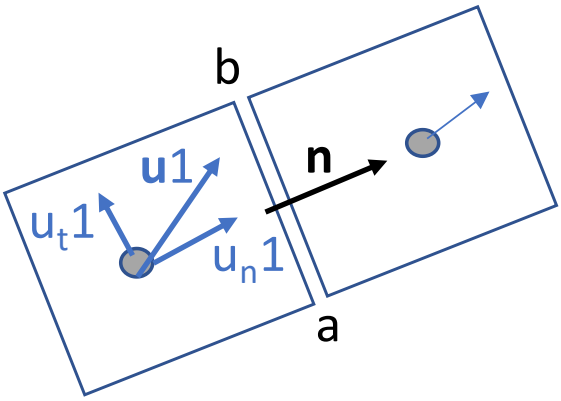
La formulation est similaire à celle du cas 1D, mais on a maintenant trois inconnues par maille :

- La cote d'eau z
- Le vecteur vitesse **u** = (u_x u_y).



Dans cette section les vecteurs sont désignés en caractères gras.

n est le vecteur unitaire normal à l'arête commune entre les mailles 1 et 2 :



Le vecteur **u1** est décomposable comme suit : **u1** = (u_t1 $_{un}1$) où :

- u_n est la composante dans la direction du vecteur n,
- u_t est la composante parallèle à l'arête ab

b est largeur de l'arête ab.

On définit les termes suivants au centroïde de chaque maille :

- h : hauteur d'eau,
- vecteur **q** = (hu_x hu_y)
- énergie $e_n1 = z1 + u_n1^{**2}/2g$, $e_n2 = z2 + u_n2^{**2}/2g$
- nombre de Froude : $Fr_n1 = u_n$ / sqrt (g x h1), $Fr_n2 = u_n$ / sqrt (g x h2)

En l'absence de singularité les flux d'échange entre deux mailles adjacentes sont :

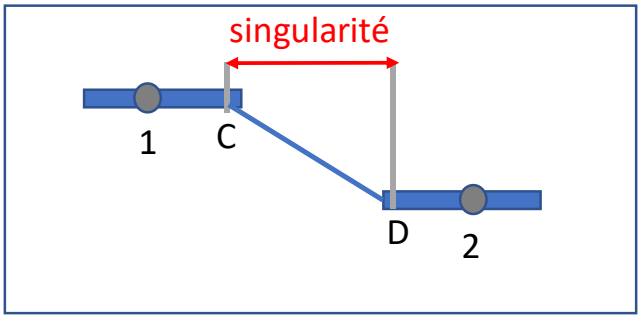
- débit : Q = 0.5 x b x (**q**1.**n** + q**2**.**n**)
- vecteur quantité de mouvement : **F** = b x (**q**1.**n) u1 si q**1.**n** >0. **F**= b x (**q**2.**n) u2 si q**1.**n** <0

Lorsqu'une singularité est définie entre les deux mailles le problème se complique car on introduit une relation supplémentaire, à savoir le débit d'échange Q_L qui est fonction de la loi de perte de

charge associée à la singularité. Il faut de plus tenir compte du fait que les cotes de fond (z_f1 zf2) des mailles 1 et 2 peuvent être très différentes.

Pour tenir compte de l'ensemble des cas possibles d'écoulement dans la formulation complète on partitionne localement le système formé par deux mailles adjacentes comme suit :

La formulation est similaire à celle du cas 1D, avec les adaptations suivantes :



Deux nœuds de calcul intermédiaires : C et D sont introduits aux frontières des mailles 1 et 2, de part et d'autre de la singularité. On suppose dans ce qui suit que le débit d'écoulement est positif dans le sens 1-2.

Les étapes de traitement au cours d'un pas de temps [t_n t_{n+1}] sont les suivantes :

<u>Calcul du débit QL = f (e_n1, e_n2)</u>

La fonction f s'exprime différemment selon que le régime d'écoulement est dénoyé ou non :

- en régime dénoyé : f = f_d (e_n1)
- en régime noyé : f = f_n (e_n1, e_n2)

<u>Calcul de la cote zc au point C</u>

zc est calculé en supposant le régime dénoyé en résolvant l'équation : q1 = f_d (e_n1).

On en déduit uc = q1/ (b x (zc-h_f1)

<u>Calcul de la cote et de la vitesse au point D :</u>

On suppose pour cela que l'écoulement est dénoyé et que l'énergie est conservée entre les sections C et D : ed = ec pour le débit q1.

On déduit de cette équation les cote et vitesse au point D : zd et ud.

<u>Comparaison des termes d'impulsion au droit des sections D et 2 :</u>

Md = b x (**q**1.**n) x** ud + fp(zd)

M2 = b x (**q**1.**n) x** u_n2 + fp(z2)

fp désigne la composante de la force de pression statique projetée dans la direction **n.**

On définit le terme iflag2 comme suit :

- si Md < Me ou Fr_n2 >1 : iflag2 = 1
- si Md < Me : iflag2 = 0

<u>Comparaison des termes d'impulsion au droit des sections 1 et C :</u>

M1= b x (**q**1.**n) x** u_n1 + fp(z1)

Mc = b x (**q**1.**n)** + fp(zc)

On définit le terme iflag1 comme suit :

- si M1 < Me ou Fr1 >1 : iflag1 = 1
- si M1 < Md : iflag1 = 0

Calcul des flux échangés entre les mailles 1 et 2.

Les termes de débit et de quantité de mouvement échangés dépendent des valeurs prises par les indicateurs iflag1et iflag2. Les expressions sont données dans les tableaux ci-dessous :

Ireg1	Ireg2	Qs1	Qe2
0	0	f (e_n1, e_n2)	f (e_n1, e_n2)
0	1	f (e_n1, e_n2)	f (e_n1, e_n2)
1	0	0.5 x b x (**q**1.**n + q**2.**n**)	0.5 x b x (**q**1.**n + q**2.**n**)
1	1	0.5 x b x (**q**1.**n + q**2.**n**)	0.5 x b x (**q**1.**n + q**2.**n**)

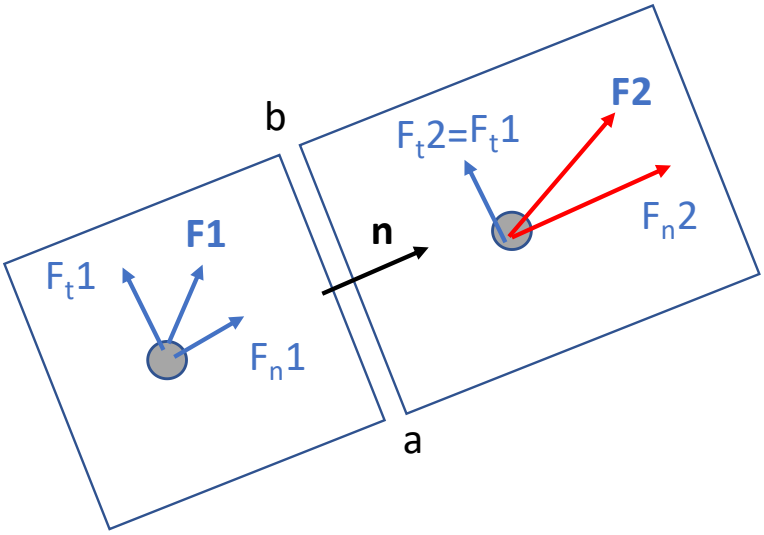
Ireg1	Ireg2	**Fs1**	**Fe2**
0	0	b x (**q**1.**n) u1**	b x (**q**1.**n) u1**
0	1	b x (**q**1.**n) u1**	b x (**q**1.**n) x (ut1 +** ud**n)**
1	0	b x (**q**1.**n) u1**	b x (**q**1.**n) u1**
1	1	b x (**q**1.**n) u1**	b x (**q**1.**n) x (ut1 +** ud**n)**

Dans les tableaux ci-dessus :

- Qs1 désigne le débit sortant de la maille 1,
- Qs2 désigne le débit entrant dans la maille 2,
- **Fs1** désigne le vecteur flux de quantité de mouvement sortant de la maille 1,
- **Fe2** désigne le vecteur flux de quantité de mouvement entrant dans la maille 2.

Le vecteur **Fe2** dans le cas ou ireg2=1 mérite commentaire : ce vecteur est constitué de la combinaison vectorielle de deux composantes :

- Une composante tangentielle à la direction de l'arête ab qui n'est pas modifiée,
- Une composante normale à la direction de cette arête qui est généralement amplifiée par la vitesse ud :

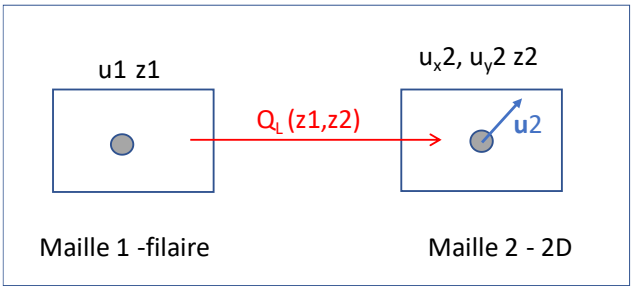


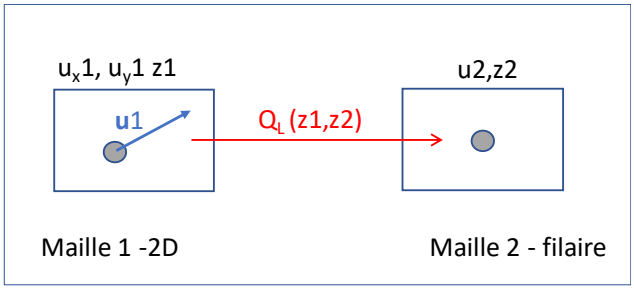
Une application importante est le franchissement d'un seuil déversant à l'intérieur d'un domaine 2D :

- si le seuil est noyé les directions du vecteur vitesse seront sensiblement les mêmes en amont et en aval du seuil.
- si par contre l'écoulement est dénoyé au-dessus du seuil, l'orientation du vecteur de flux de quantité de mouvement est modifiée, ce qui implique une orientation différente du vecteur vitesse en aval immédiat du seuil ; la cartographie des courants en aval du seuil peut s'en trouver totalement modifiée.

4.2.3 Domaine filaire – domaine 2D

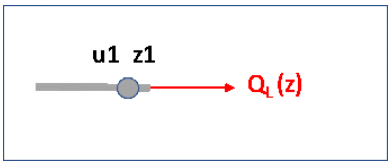
Les configurations mixtes sont définies ci-dessous :





La formulation est dans ces cas adaptée à partir de celles décrites pour le domaine filaire et pour le domaine 2D.

4.2.4 Condition à la limite aval d'une branche filaire



Les étapes de traitement au cours d'un pas de temps [t_n t_{n+1}] sont les suivantes :

1. <u>Calcul du débit QL = f (e1)</u>
2. <u>Calcul de la cote zc au point C</u>

zc est calculé en supposant le régime dénoyé en résolvant l'équation : q1 = f_d (e1).

On en déduit uc = q1/s(zc)

3. Calcul de l'indicateur ireg1 en comparant les impulsions M1 et Mc :
   - Ireg1=0 si M1 < Mc
   - Ireg1=1 si M1> Mc ou si Fr1>1

Calcul du flux sortant de la maille :

Les termes de débit et de quantité de mouvement échangés dépendent de la valeur prise par l'indicateur iflag1. Les expressions sont données dans le tableau ci-dessous :

Ireg1	Qs1	Fs1
0	f (e1)	q1 x u1
1	q1	q1 x u1

4.3 LES DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS

4.3.1 Liaison bi nodale

Calcul complet

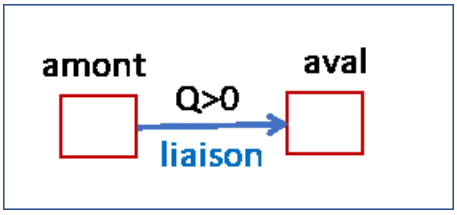
Les domaines susceptibles d'être traités en mode Affin sont :

- Le domaine 2D,
- La branche de collecteur,
- Le bief filaire.

Les autres domaines : casier et station de gestion sont toujours traités en mode simplifié.

Les domaines sont connectés entre eux par des liaisons (links). Chaque liaison fait transiter un débit via la loi de la singularité QL (e1, e2) mais aussi un vecteur flux de quantité de mouvement dont l'expression diffère selon la nature des domaines connectés.

Malgré la grande diversité de configurations possibles, le nombre de cas à traiter peut-être ramené à 9 en considérant une combinaison de deux indices. Chaque indice caractérise la nature et le mode de traitement retenu pour une maille ou un nœud connecté à la liaison. La liaison se voit donc attribuer deux indices (un pour l'amont, un pour l'aval). Cette opération est effectuée dans la phase de lecture des données.



Indice 1 : cet indice est appliqué dans les cas suivants :

- nœud courant de domaine filaire (par opposition aux nœuds d'extrémité),
- casier,
- carrefour
- Nœud de station de gestion.

Indice 2 : nœud extrémité d'une branche ou d'un bief

Indice 3 : maille d'un domaine 2D

Les cas de figure possibles sont récapitulés dans le tableau suivant :

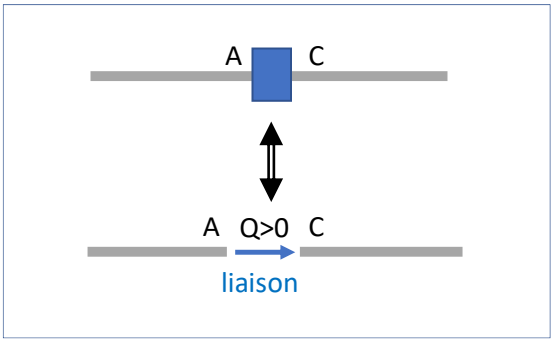
1-1	1-2	1-3
2-1	2-2	2-3
3-1	3-2	3-3

Dans ce tableau le premier champ désigne l'indice affecté au nœud amont, le second champ désigne l'indice affecté au nœud aval. On suppose dans ce qui suit que le débit est positif dans le sens 1 vers 2.

Lorsque le débit est négatif on est ramené au cas correspondant aux indices inversés. Par exemple le cas « 3-1 » devient le cas « 1-3 » lorsque le débit est négatif.

Singularité posée sur un nœud courant d'une branche ou d'un bief

La singularité est remplacée au stade d'exécution des calculs par une liaison bi nodale orientée le long de la branche :



On est ramenée à une liaison de type 2-2 associée à un domaine filaire.

calcul hybride

Une liaison peut connecter des nœuds appartenant à un bief ou un domaine pour lequel les calculs sont simplifiés. Tout se passe alors dans le traitement comme si l'indice devenait égal à 1. Par exemple une liaison bi nodale 2-3 pour laquelle le nœud aval se trouve dans un domaine avec calcul simplifié est traitée dans le code comme un liaison 2-1.

Par défaut tous les domaines sont traités en mode de calcul simplifié. On se ramène dans cette hypothèse au cas unique égal à 1-1 pour toutes les liaisons bi nodales, y compris les liaisons associées aux singularités.

4.3.2 Liaison uni nodale

Domaine traité en mode de calcul simplifié

Les liaisons unies nodales peuvent être posées sur n'importe quel nœud de calcul du domaine traité en mode simplifié (à l'exception du nœud hydrologique). La liaison est de type 1 pour tous les objets.

Domaine traité en mode de Calcul affine

Les restrictions suivantes sont apportées :

Les liaisons « hydrograph » et « tank » peuvent être posées sur n'importe quel nœud. Elles sont de type 1.
Les autres liaisons ne peuvent être posées que :

- sur le nœud aval d'une branche filaire, elles sont alors de type 2,
- sur un nœud de station de gestion, ou dans un casier, elles sont alors de type 1.

4.4 RÉGLES DE CALCUL DE LA CHARGE DANS LES ÉQUATIONS DES SINGULARITÉS

4.4.1 Position du problème

Dans le cas général le débit à travers une singularité ou une liaison bi nodale est exprimé sous la forme :

Q=f (e1, e2) (1)

où :

- e1 désigne l'énergie spécifique au nœud amont : $e_1 = z_1 + \frac{u_1^2}{2g}$ (2)
- e2 désigne l'énergie spécifique au nœud aval : $e_2 = z_2 + \frac{u_2^2}{2g}$ (3)

Un nœud extrémité désigne une des entités suivantes :

- regard de collecteur,

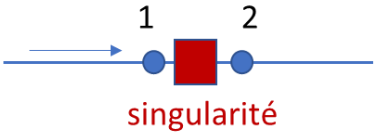
- nœud de rivière,
- maille 2D,
- carrefour,
- station de gestion,
- casier.

Dans certaines configurations la prise en compte du terme cinétique dans le calcul de l'énergie ne s'impose pas et peut même conduire à des résultats erronés.

La présente note précise les règles appliquées dans HYDRA vis-à-vis de la prise en compte ou non de ce terme dans le calcul du débit à travers une singularité (équation 1 ci-dessus).

4.4.2 Les différents cas de figure

a) Singularité posée sur le nœud courant d'un tronçon de collecteur ou d'un bief de rivière



La singularité est supposée perpendiculaire à la direction de l'écoulement : l'équation (1) s'applique avec l'expression complète pour les termes 1 et e2 : $e_1 = z_1 + \frac{u_1^2}{2g}$

A noter qu'HYDRA interdit la pose d'une singularité en extrémité de branche ou de bief.

Remarque importante :

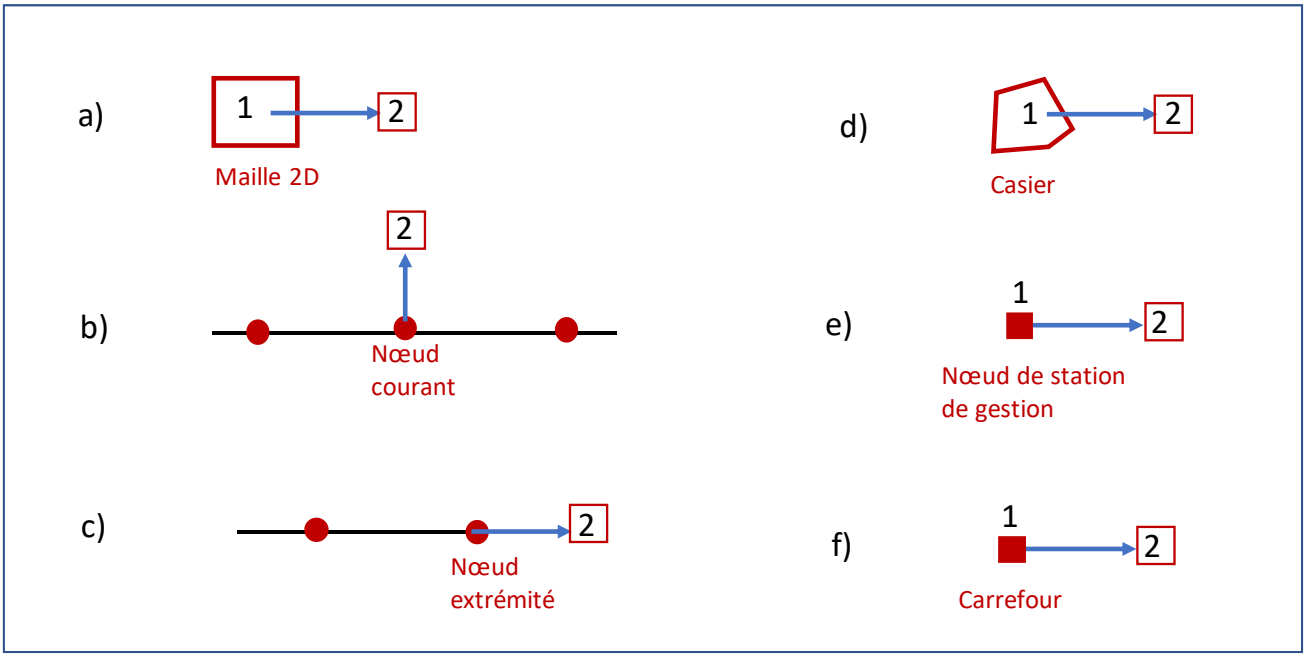
HYDRA génère systématiquement un élément « coupure hydraulique » si une discontinuité de géométrie est détectée au franchissement d'un nœud de calcul et en l'absence de singularité.

Si une singularité est posée sur le nœud le programme ne génère pas de coupure et suppose implicitement que cette coupure est gérée par les équations de la singularité. En pratique toutes les singularités modélisées par HYDRA disposent d'un algorithme de déconnexion hydraulique pour assurer la continuité des calculs.

b) Liaison bi nodale

L'analyse est restreinte ci-après au nœud amont de la liaison. Cette analyse est la même pour le nœud aval.

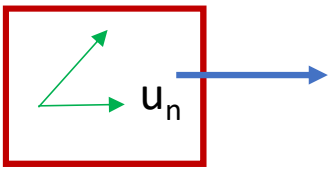
Le calcul de e_1 est différent selon les cas de figure considérés :



Cas a : maille 2D

$$e_1 = z_1 + \frac{u_n^2}{2g}$$

Où u_n est la composante du vecteur vitesse dans la direction de liaison :



Cas b : nœud courant

On considère dans ce cas que la liaison est latérale/axe du tronçon. Le terme cinétique associé à la direction de l'écoulement le long de la liaison est nul et E_1 devient :

$e_1 = z_1$

Cas c : nœud en extrémité de branche ou de bief

On considère dans ce cas que la liaison est frontale : $e_1 = z_1 + \frac{u_1^2}{2g}$

Cas d, e et f

e_1 est dans chacun de ce cas assimilé à la cote z_1 : aucun terme cinétique n'est considéré.

4.5 IMPLÉMENTATION DANS LE CODE DE CALCUL

4.5.1 Singularité posée sur un nœud de branche filaire

Liste des singularités

Comme indiqué plus haut une singularité est traitée dans le code de calcul comme une liaison longitudinale le long d'un domaine filaire.

- si la branche est définie en mode Affin, la liaison est de type 2-2,
- si la branche est définie en mode simplifié la liaison est de type 1-1.

Les éléments de modélisation concernés sont :

- *Gate, Weir, Regulated Gate,*
- *Borda Headloss,*
- *Parametric headloss,*
- *Bridge et Bradley*
- *Hydraulic Cut,*
- *Eracb*

L'élément *Eracb* est généré automatiquement par le programme en cas de changement de géométrie au niveau d'un nœud utilisateur. Si ce nœud est occupé par un objet singularité le changement de géométrie est pris en compte par les équations de la singularité.

A noter que le code de calcul interdit qu'une singularité soit posée sur un nœud extrémité de branche filaire.

Organisation du code.

Les calculs de flux sont pilotés par la routine *LF2*

La séquence de traitement pour le calcul des flux est la suivante :

1. Appel à la routine spécifique de la singularité.

Cette routine calcule :

- Le débit Q_L=f (e1, e2)
- La cote zc telle que : $q1 = f_d(zc)$

zc est la cote critique calculée en supposant l'écoulement dénoyé en aval de la singularité,

A noter que les trois éléments : *Gate, Weir, Regulated Gate so*nt traités par la même routine, dénommée : Calcul_*vanne_affin* dans le code.

Chaque routine d'élément calcule également l'indicateur : ireg*2* qui conditionne le calcul du flux de quantité de mouvement sortant de la singularité, ainsi que le flux Qe2 si ireg2=1

2. Calcul de l'indicateur ireg1

3. Appel à la routine *LF2_esbl* pour le Calcul des flux sortant de la maile 1 et entrant dans la maille 2 (débit et quantité de mouvement) en fonction des valeurs prises par les indicateurs ireg1 et ireg2.

Note : si le traitement de la branche filaire est défini en mode simplifié le code calcule uniquement le débit QL ; les autres paramètres ne sont pas exploités.

4.5.2 Liaison bi nodale

Liste des liaisons bi nodales

Les éléments de modélisation concernés sont :

- *Gate, Weir, Regulated Gate, Overflow*
- *Borda Headloss,*
- *Pump et Pump derivation,*
- *Connector*
- *Strickler*
- *Porous,*
- *Network Overflow.*

Organisation du code.

Les calculs de flux sont pilotés par la routine *LI2*

La séquence de traitement pour le calcul des flux est la suivante :

1. identification de la configuration associée à la liaison.

2. Appel à la routine spécifique de la liaison.

Cette routine calcule :

- Le débit Q_L=f (e1, e2)
- La cote zc telle que : $q1 = f_d(zc)$

zc est la cote critique calculée en supposant l'écoulement dénoyé en aval de la liaison,

A noter que les quatre éléments : *Gate, Weir, Regulated Gate et Overflow* sont traités par la même routine, dénommée : Calcul_*vanne_affin* dans le code.

Chaque routine d'élément calcule également l'indicateur : ireg*2* qui conditionne le calcul du flux de quantité de mouvement sortant de la singularité, ainsi que le flux Qe2 si ireg2=1

3. Calcul de l'indicateur ireg1

4. Appel à la routine *LI2_esbl* pour le calcul des flux sortant de la maile 1 et entrant dans la maille 2 en fonction des valeurs prises par les indicateurs ireg1 et ireg2. Le codage de cette routine est assez complexe en raison du nombre très important de combinaisons possibles de cas : 72 cas différents si on combine les configurations (9), les couples de valeurs ireg1-ireg2 (4) et le signe du débit d'échange (2).

Note : si la configuration est 1-1 le code calcule uniquement le débit QL ; les autres paramètres ne sont pas exploités.

4.5.3 Liaison uni nodale

Liste des liaisons uni nodales

Les éléments de modélisation concernés sont :

- *Hydrograph, constant flow, tank,*
- *Froude bc,*
- *Strickler bc,*
- *ZQ bc,*
- *TZ bc,*
- *Weir bc,*
- *Racc.*

Comme indiqué plus haut toutes ces liaisons peuvent être posés sur n'importe quel container d'un modèle si ce container appartient à un domaine de calcul simplifié.

Si le domaine est traité en mode affine seuls les éléments *Hydrograph, constant flow, tank* peuvent être posés sur n'importe quel container du modèle. Les autres liaisons ne peuvent être placés que :

- sur l''extrémité aval d'une branche filaire,
- *dans un casier*
- *sur un nœud de station de gestion.*

Il est notamment interdit de poser ces liaisons sur un nœud courant de branche filaire ou dans une maille de domaine 2D.

Organisation du code.

Les calculs de flux sont pilotés par la routine *LI2_UN*

La séquence de traitement pour le calcul des flux est la suivante :

1. Appel à la routine spécifique de la liaison.

Cette routine calcule :

- Le débit Q_L=f (e1)
- La cote zc telle que : $q1 = f_d(e1)$

2. Calcul de l'indicateur ireg1

3. Calcul du flux sortant de la maille 1 en fonction de la valeur trouvée pour l'indicateur ireg1.

5 PERFORMANCES DE L'ALGORITHME ET EXPLOITATION PRATIQUE

5.1 ROBUSTESSE ET PRECISION

L'algorithme présenté dans ce manuel est implicite et donc inconditionnellement stable : la stabilité des calculs n'est pas soumise à des conditions de pas de temps critique comme dans les algorithmes de résolution explicite des équations de Barré de St Venant.

Pour autant les pas de temps sont adaptatifs et gérés automatiquement par le code pour limiter à 5 cm environ le saut de cote maximum à chaque nœud de calcul entre deux pas de temps. Moyennant cette précaution les calculs se sont révélés très stables, le pas de temps s'ajustant non pas en fonction d'un critère de stabilité, mais en fonction de la variabilité temporelle des écoulements :

- pour les problèmes classiques de régimes transitoires lentement évolutifs (cas des crues) les pas de temps seront de plusieurs minutes,
- pour les problèmes de rupture de barrage, générant des fronts d'onde raides de plusieurs mètres le pas temps descendra à des valeurs faibles, de l'ordre de la seconde.

En particulier les termes de forçage liés à la pente ne posent aucune difficulté particulière et les calculs restent précis pour des nombres de Froude dépassant 5.

5.2 CONDITIONS D'UTILISATION

HYDRA propose par défaut une formulation simplifiée, dans laquelle les termes convectifs figurant dans les équations de quantité de mouvement sont annulés. Cette simplification se justifie dans la plupart des problèmes de modélisation pour lesquels les lois hydrauliques sont dominées par les termes de frottement, de pression et de gravité. Cette simplification permet de limiter les temps de simulation tout en garantissant une très grande robustesse des calculs.

La méthode complète (également nommée méthode « Affin ») est en pratique mise en œuvre sur des classes de problèmes pour lesquels les termes convectifs ne peuvent pas être négligés, tels que :

- ressauts droits et obliques en régime permanent,
- courantologie 2D, intégrant des champs découvrants,
- ondes de rupture de barrage.

Hydra offre la possibilité de panacher les deux formulations dans une même modèle.

En pratique les calculs sont initialisés (dans le cadre d'un démarrage à froid) à l'aide des algorithmes simplifiés pour tous les domaines présents dans le modèle. Pour activer les calculs en mode complet il suffit d'introduire le mot clé suivant dans la fenêtre de paramétrage du scénario :

*C_AFFIN

Tdeb

cid1

cid2

- Tdeb est l'instant à partir duquel la méthode Affin est mise en œuvre.
- Cid1 est un nom de domaine 2D ou un nom de branche filaire.

5.3 TESTS DE VALIDITE

La formulation présentée dans ce volume a été évaluée avec un certain nombre de tests qui sont décrits dans le manuel intitulé « Tests de validation des calculs en mode Affin ». Ils couvrent un panel de configurations variées et représentatives des situations rencontrées dans les projets.

L'examen des résultats obtenus avec ces différents tests démontrent la pertinence de la formulation présente dans le présent volume, ainsi que la qualité des résultats fournis par la méthode Affin.